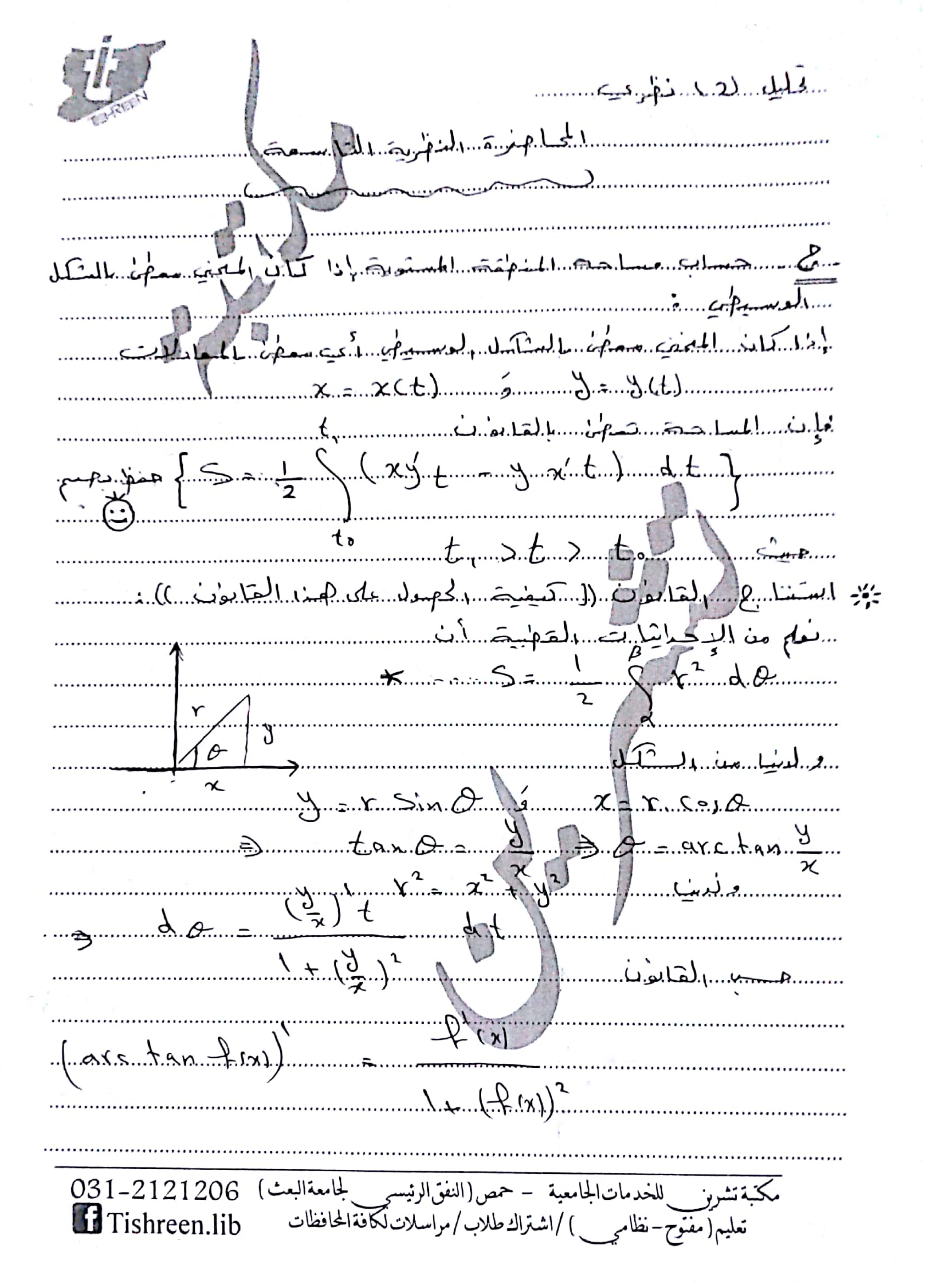


تحليل (2) نظري

المحاضرة النظرية التاسعة

م: حساب مساحة المنطقة المستوية إذا كان المنحني معطى بالشكل الوسيطي:

إذا كان المنحني معطى بالشكل الوسيطي أي معطى بالمعادلات

$$x = x(t) \quad و \quad y = y(t)$$

فإن المساحة تعطى بالقانون

حفظ بصم $\left\{ S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x y'_t - y x'_t)\, dt \right\}$

حيث $t_1 > t > t_0$

☼ استنتاج القانون ((كيفية الحصول على هذا القانون)):

نعلم من الإحداثيات القطبية أن

$$* \quad S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

ولدينا من الشكل

$$y = r\sin\theta \quad و \quad x = r\cos\theta$$

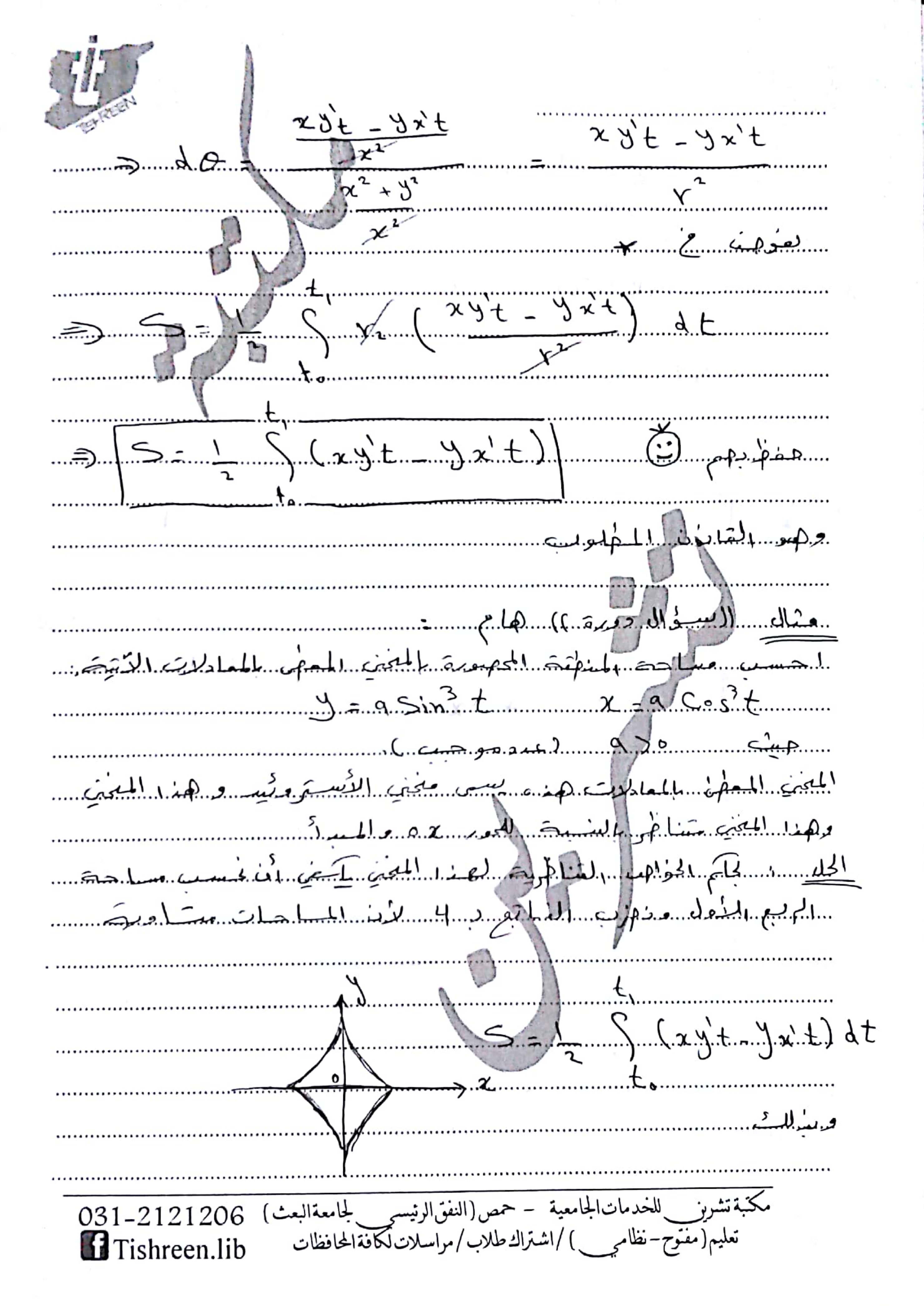
$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

ولدينا $r^2 = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'_t}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\, dt$$

حسب القانون

$$(\arctan f(x))' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$$



$$\Rightarrow d\theta = \frac{\frac{xy'_t - yx'_t}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{xy'_t - yx'_t}{r^2}$$

نعوض في *

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} r^2 \left(\frac{xy'_t - yx'_t}{r^2}\right) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy'_t - yx'_t)}$$

حفظ بصم ☺

وهو القانون المطلوب.

مثال (السؤال دورة 2) هام :

احسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحني المعرف بالمعادلات الآتية:

$$y = a\sin^3 t \qquad x = a\cos^3 t$$

حيث $a > 0$ (عدد موجب).

المنحني المعرف بالمعادلات هذه يسمى منحني الأستروئيد و هذا المنحني

وهذا المنحني متناظر بالنسبة لمحور ox والمبدأ

الحل: نلاحظ الخواص التناظرية لهذا المنحني يكفي أن نحسب مساحة الربع الأول ونضرب الناتج ب 4 لأن المساحات متساوية

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (xy'_t - yx'_t)\, dt$$

ونبدأ بالحل

$$x'_t = -3a\cos^2 t \sin t$$
$$y'_t = 3a\sin^2 t \cos t$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} 4\int_0^{2\pi} (3a^2 \sin^2 t \cos^4 t + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t)\, dt$$

$$\Rightarrow S = 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t \cos^2 t)\, dt$$

نعلم أن $\sin 2t = 2\sin t \cos t$

$$\Rightarrow \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$\Rightarrow S = 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} \sin 2t)^2\, dt$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, dt$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 2t)\, dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\, dt$$

$$= \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\, dt$$

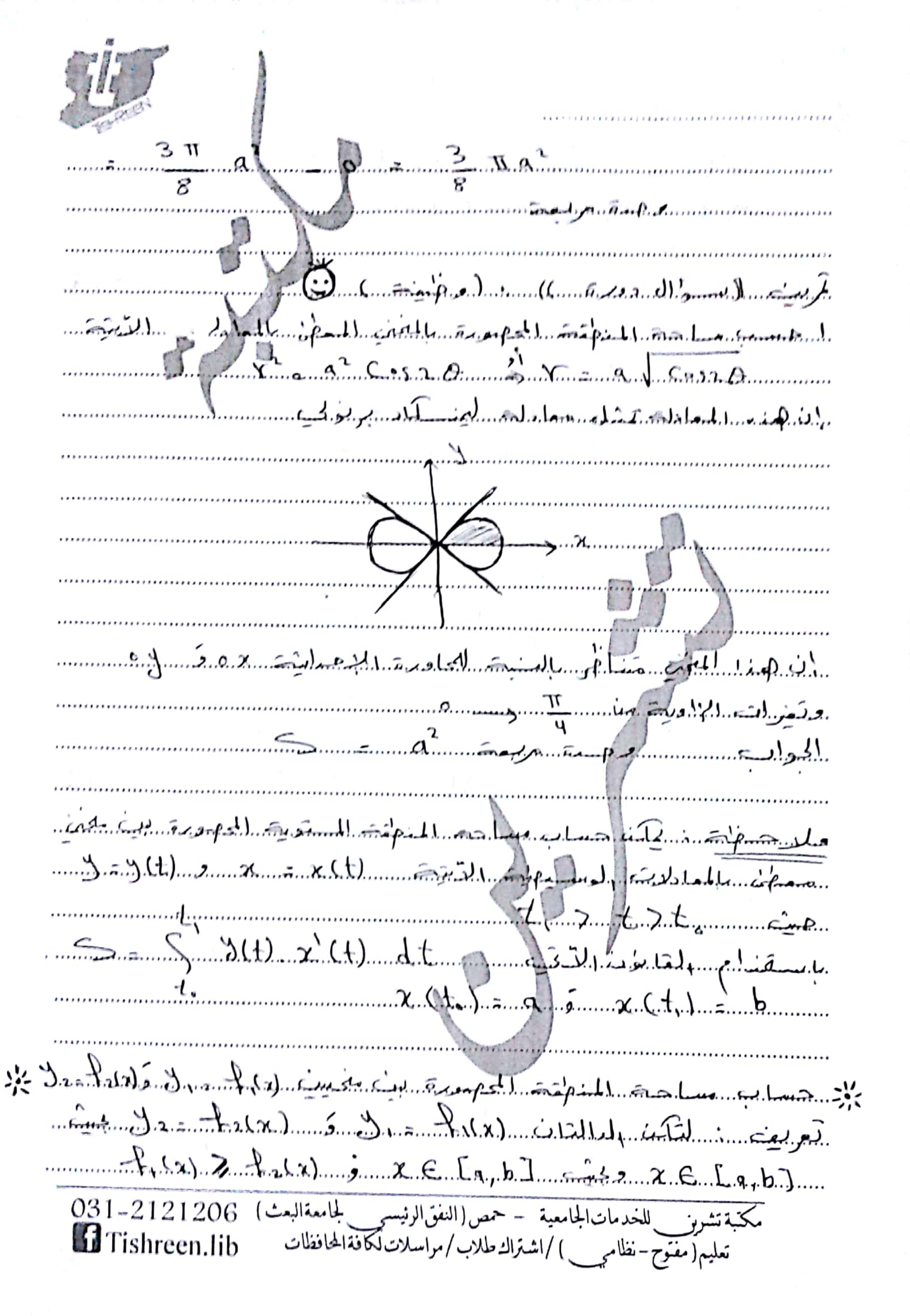
$$= \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt - \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t\, dt$$

نضرب ونقسم على 4

$$= \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{3}{16} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t\, d(4t)$$

حيث أن

$$d(4t) = 4\, dt$$



$= \frac{3\pi}{8} a^2 - 0 = \frac{3}{8}\pi a^2$

وحدة مربعة

تمرين (السؤال دورة) : (مهم)

احسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحني المعطى بالمعادلة الآتية

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ أو $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$

إن هذه المعادلة تمثل معادلة لمنسكات برنولي

إن هذا المنحني متناظر بالنسبة للمحاور الإحداثية $x\,o\,y$

وتتغير الزاوية من $\frac{\pi}{4}$ حتى 0

الجواب: $S = a^2$ وحدة مربعة

ملاحظة: يمكننا حساب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحني معطى بالمعادلات الوسيطية الآتية $x = x(t)$ و $y = y(t)$

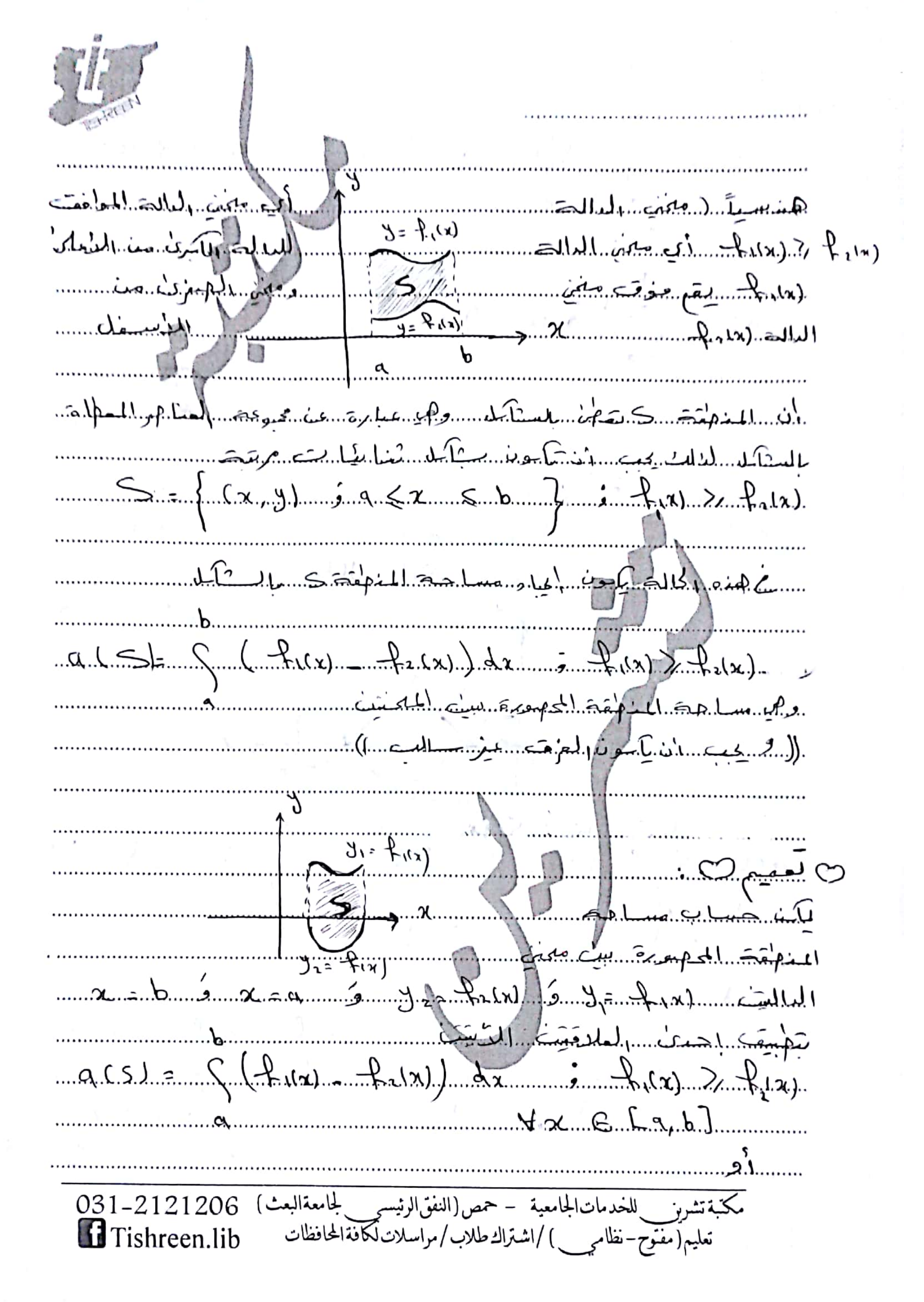
حيث $t_1 > t > t_0$

باستخدام القانون الآتي $S = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt$

$x(t_0) = a$ و $x(t_1) = b$

* حساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ *

تعريف: لتكن الدالتان $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ حيث $x \in [a,b]$ وحيث $x \in [a,b]$ و $f_1(x) \geq f_2(x)$



هندسياً: (منحني الدالة $f_1(x) \geq f_2(x)$ أي منحني الدالة $f_1(x)$ يقع فوق منحني الدالة $f_2(x)$)

(أي منحني الدالة الموافقة للدالة الأكبر من المنطقة ومنحني الجزء من الأسفل)

أن المنطقة S تقع بالمستوي وهي عبارة عن مجموعة العناصر المطلقة بالمستوي لذلك يجب أن نكون بشكل ثنائيات مرتبة

$$S = \{ (x, y) \; ; \; a \leq x \leq b \} \; ; \; f_1(x) \geq f_2(x)$$

في هذه الحالة يكون إيجاد مساحة المنطقة S بالمستوي

$$a(S) = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) \, dx \quad ; \quad f_1(x) \geq f_2(x)$$

وهي مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين

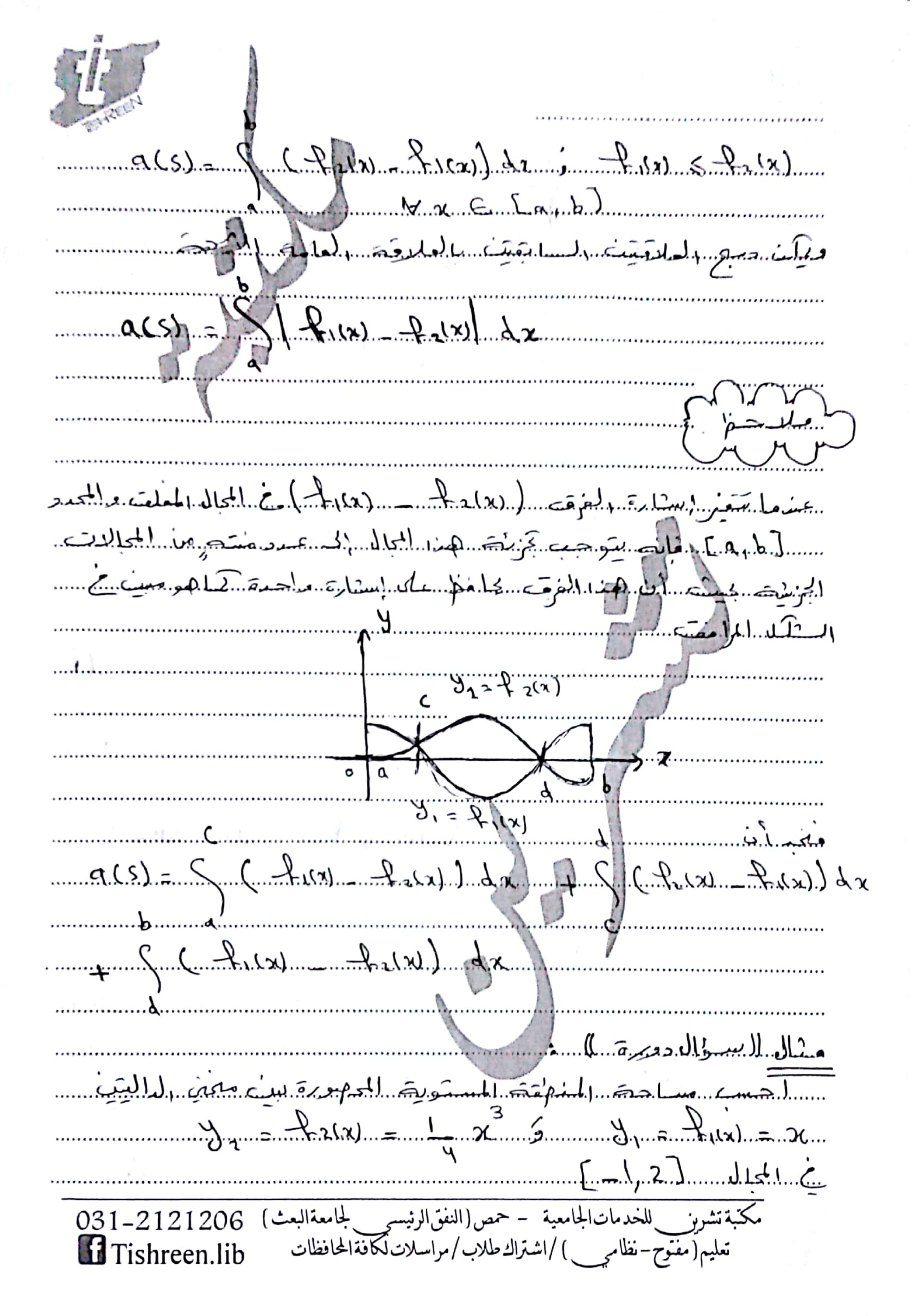
((ويجب أن يكون الجزء غير سالب))

تعميم:

يمكن حساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالتين $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ و $x = a$ و $x = b$ بتطبيق إحدى العلاقتين الآتيتين

$$a(S) = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) \, dx \quad ; \quad f_1(x) \geq f_2(x)$$
$$\forall x \in [a, b]$$

أو



$$a(S) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx \; ; \; f_1(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

ويمكن دمج العلاقتين السابقتين بالعلاقة العامة الآتية

$$a(S) = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx$$

ملاحظة

عندما تتغير إشارة الفرق $(f_1(x) - f_2(x))$ في المجال المغلق والمحدد $[a,b]$ فإنه يتوجب تجزئة هذا المجال إلى عدد منتهٍ من المجالات الجزئية بحيث أن هذا الفرق يحافظ على إشارة واحدة كما هو مبين في الشكل المرافق

فنجد أن:

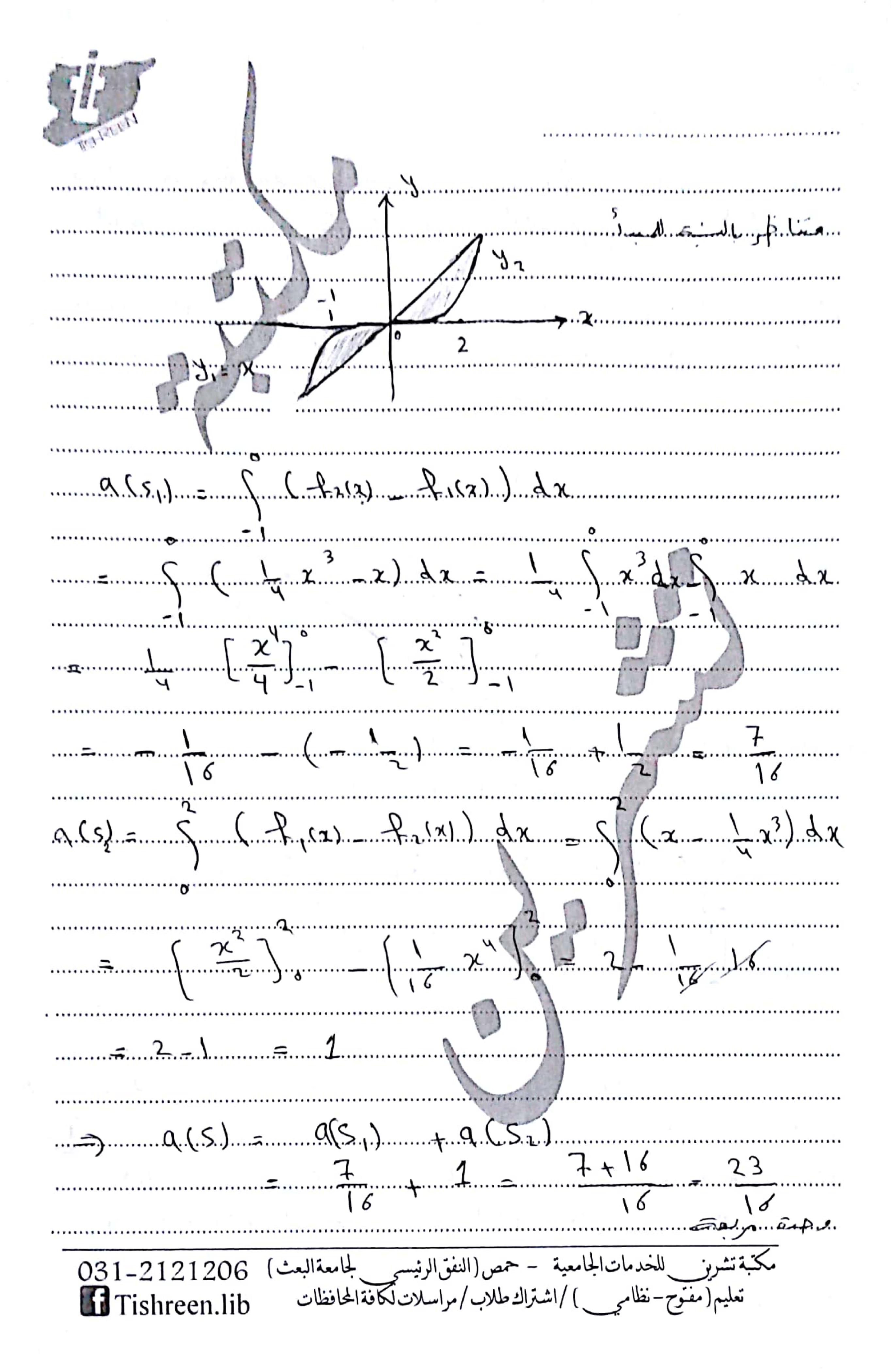
$$a(S) = \int_a^c (f_1(x) - f_2(x))\,dx + \int_c^d (f_2(x) - f_1(x))\,dx + \int_d^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$$

مثال السؤال دورة:

احسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحني الداليتين

$$y_2 = f_2(x) = \frac{1}{4}x^3 \quad \text{و} \quad y_1 = f_1(x) = x$$

في المجال $[-1, 2]$



متناظر بالنسبة للمبدأ

$$a(S_1) = \int_{-1}^{0} \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{4}x^3 - x\right) dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{0} x^3 dx - \int_{-1}^{0} x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$= -\frac{1}{16} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

$$a(S_2) = \int_{0}^{2} \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx = \int_{0}^{2} \left(x - \frac{1}{4}x^3\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{1}{16}x^4\right]_0^2 = 2 - \frac{16}{16}$$

$$= 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow a(S) = a(S_1) + a(S_2)$$

$$= \frac{7}{16} + 1 = \frac{7+16}{16} = \frac{23}{16}$$

وحدة مربعة

مثال ((السؤال دورة))

احسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين التاليين

$y_2 = 2 - x^2$ و $y_1 = x$

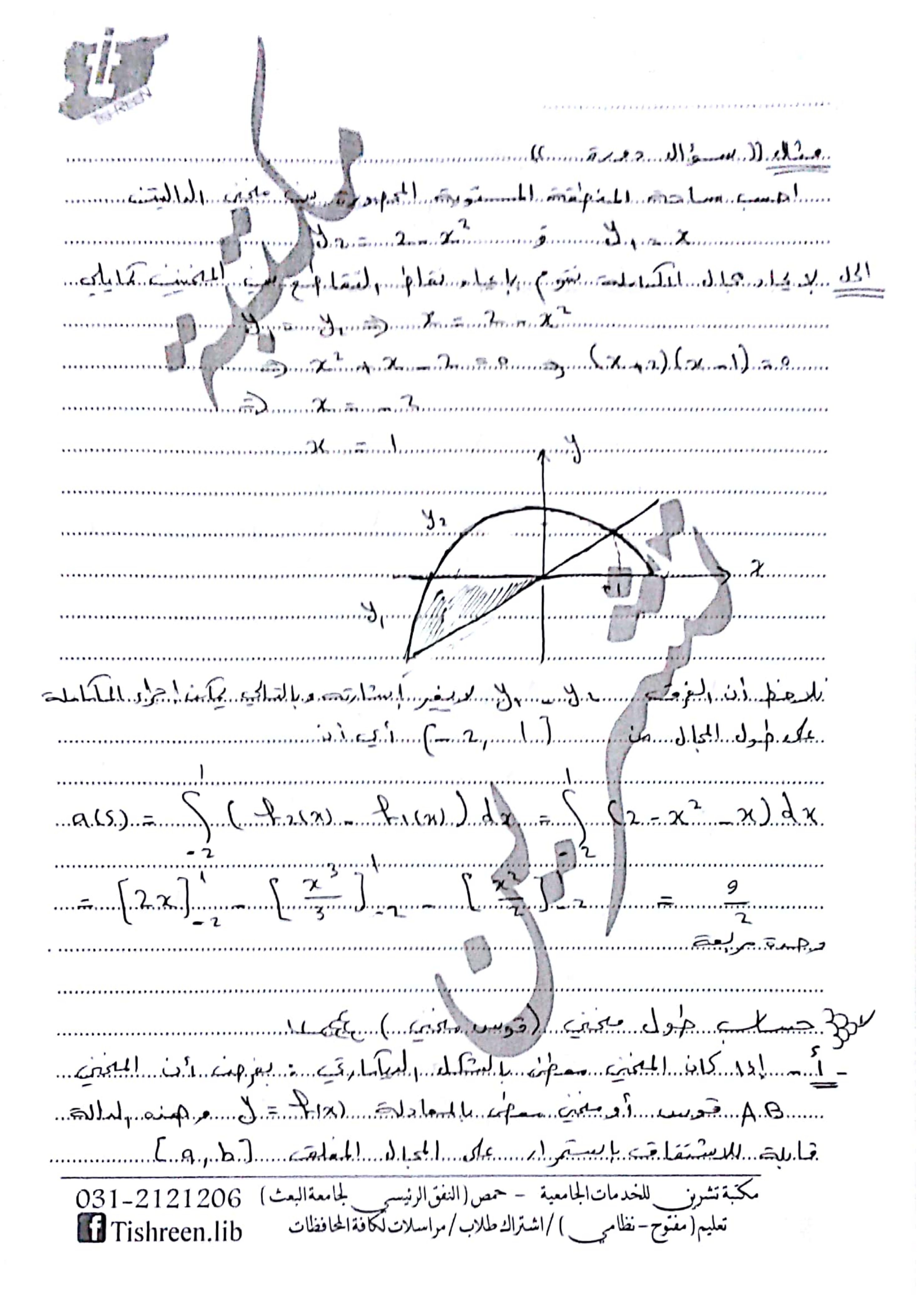
الحل: لإيجاد مجال المكاملة نقوم بإيجاد نقاط التقاطع بين المنحنيين كما يلي

$y_2 = y_1 \Rightarrow x = 2 - x^2$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = -2$

$x = 1$



نلاحظ أن الفرق $y_2 - y_1$ لا يغير إشارته وبالتالي يمكننا إجراء المكاملة على طول المجال من $[-2, 1]$ أي أن:

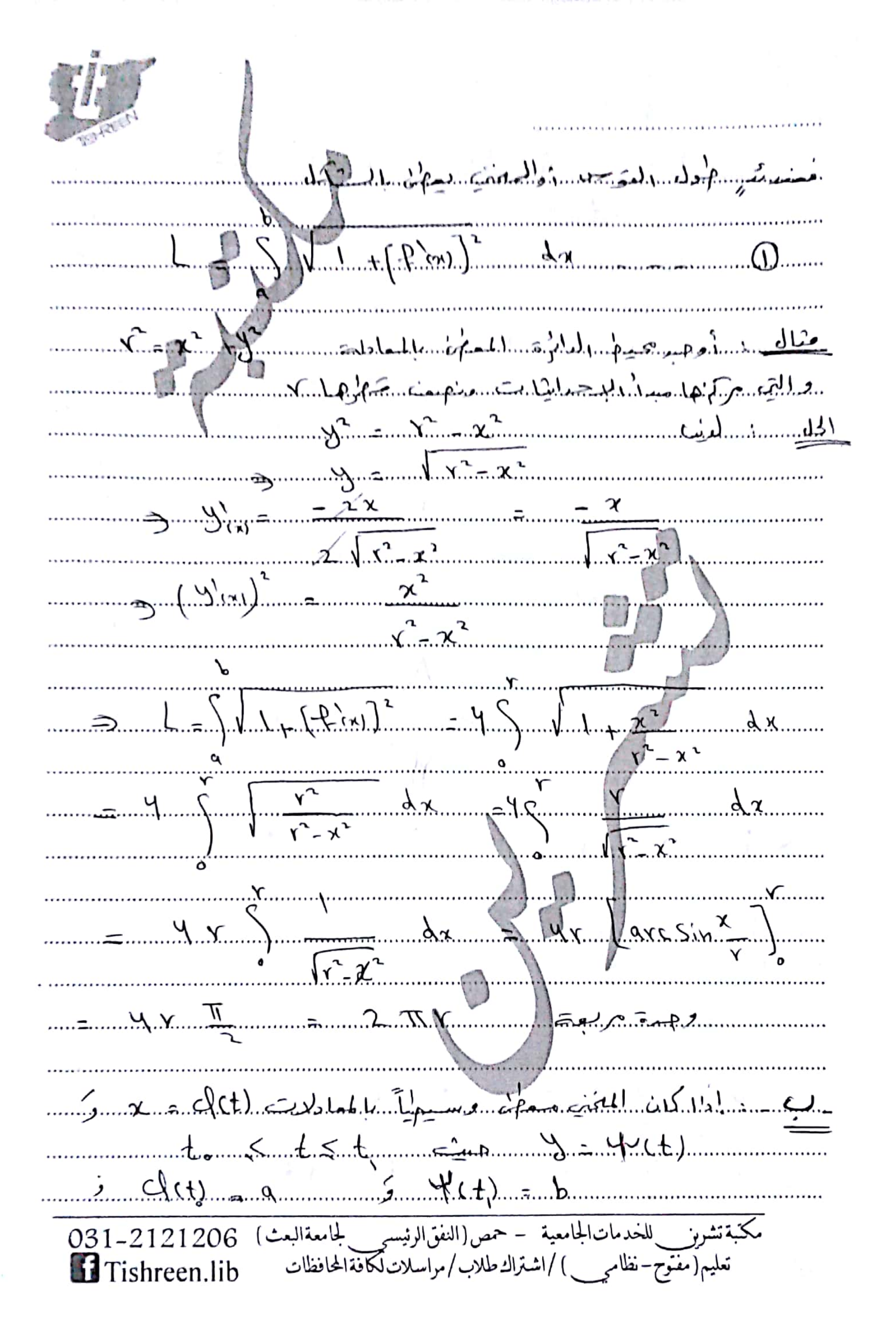
$$a(s) = \int_{-2}^{1} \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx$$

$$= \left[2x\right]_{-2}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

وحدة مربعة

3) حساب طول منحني (قوس منحني) بالتكامل

أ- إذا كان المنحني معطى بالشكل الديكارتي: بفرض أن المنحني AB قوس أو منحني معطى بالمعادلة $y = f(x)$ وهنا الدالة قابلة للاشتقاق باستمرار على المجال المغلق $[a, b]$



فيعطى طول القوس المنحني بالشكل

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \quad \text{—— } (1)$$

مثال : أوجد محيط الدائرة المعرفة بالمعادلة $r^2 = x^2 + y^2$
والتي مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها r

الحل : لدينا $y^2 = r^2 - x^2$

$$\Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow y'_{(x)} = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow (y'_{(x)})^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

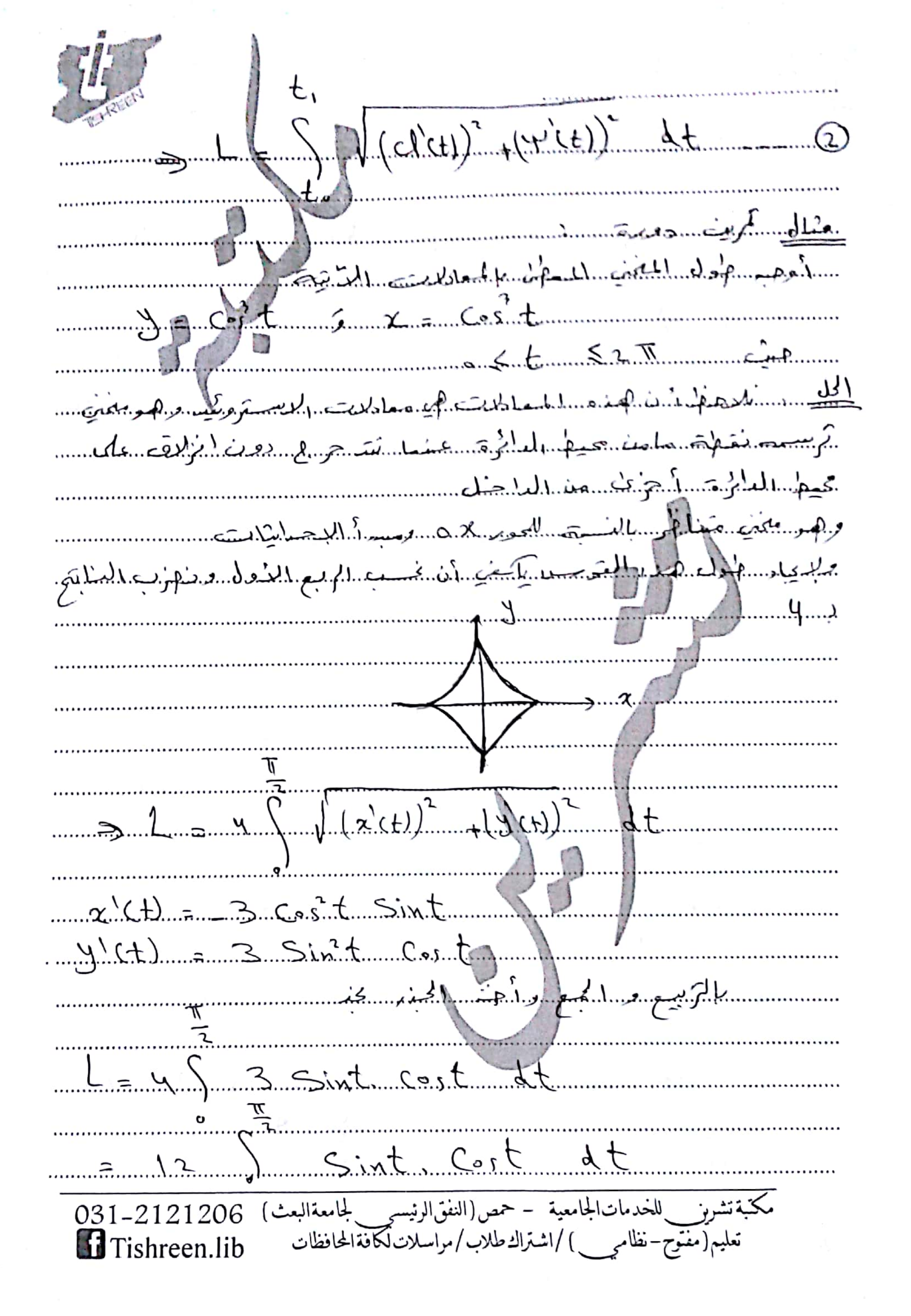
$$\Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 4\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 4r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 4r\left[\arcsin\frac{x}{r}\right]_0^r$$

$$= 4r\,\frac{\pi}{2} = 2\pi r$$ وحدة مربعة

ب - : إذا كان المنحني معرفاً وسيطياً بالمعادلات $x = \varphi(t)$ و
$y = \psi(t)$ حيث $t_0 \le t \le t_1$
و $\varphi(t_0) = a$ و $\psi(t_1) = b$



$$\Rightarrow L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\; dt \quad ——— (2)$$

مثال: تمرين دورة .

أوجد طول المنحني المعرّف بالمعادلات التالية

$y = \cos^3 t$ و $x = \cos^3 t$

حيث $0 \le t \le 2\pi$

الحل: نلاحظ أن هذه المعادلات هي معادلات الاستروئيد وهو منحني ترسمه نقطة ما من محيط الدائرة عندما تتدحرج دون انزلاق على محيط الدائرة أخرى من الداخل

وهو منحني متناظر بالنسبة للمحور ox ومبدأ الإحداثيات

ولإيجاد طول هذا المنحني يكفي أن نحسب الربع الأول ونضرب الناتج بـ 4

$$\Rightarrow L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\; dt$$

$x'(t) = -3\cos^2 t \sin t$

$y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$

بالتربيع والجمع وأخذ الجذر نجد

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t \cdot \cos t \; dt$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t \; dt$$

$$\Rightarrow L = 12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \; d(\sin t)$$

$$= 6\,[\sin^2 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$$

وحدة مربعة

ج- إذا كان المنحني معطى بالإحداثيات القطبية أي $r = f(\theta)$

و $\alpha \le \theta \le \beta$

كما أن التوابع $f(\theta)$ و $f'(\theta)$ قابلة للاستمرار على المجال $[\alpha, \beta]$

فإن القوس يكون قابل للقياس وقياسه يعطى بالعلاقة الآتية:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\; d\theta \quad \text{③}$$

مثال: ((سؤال دورة))

أوجد طول المنحني المغلق المعطى بالمعادلة الآتية

$0 \le \theta \le 2\pi$ و $r = a(1 + \cos\theta)$

إن هذا المنحني هو عبارة

عن منحني القلب يونيك

وهو مغلق ومتناظر

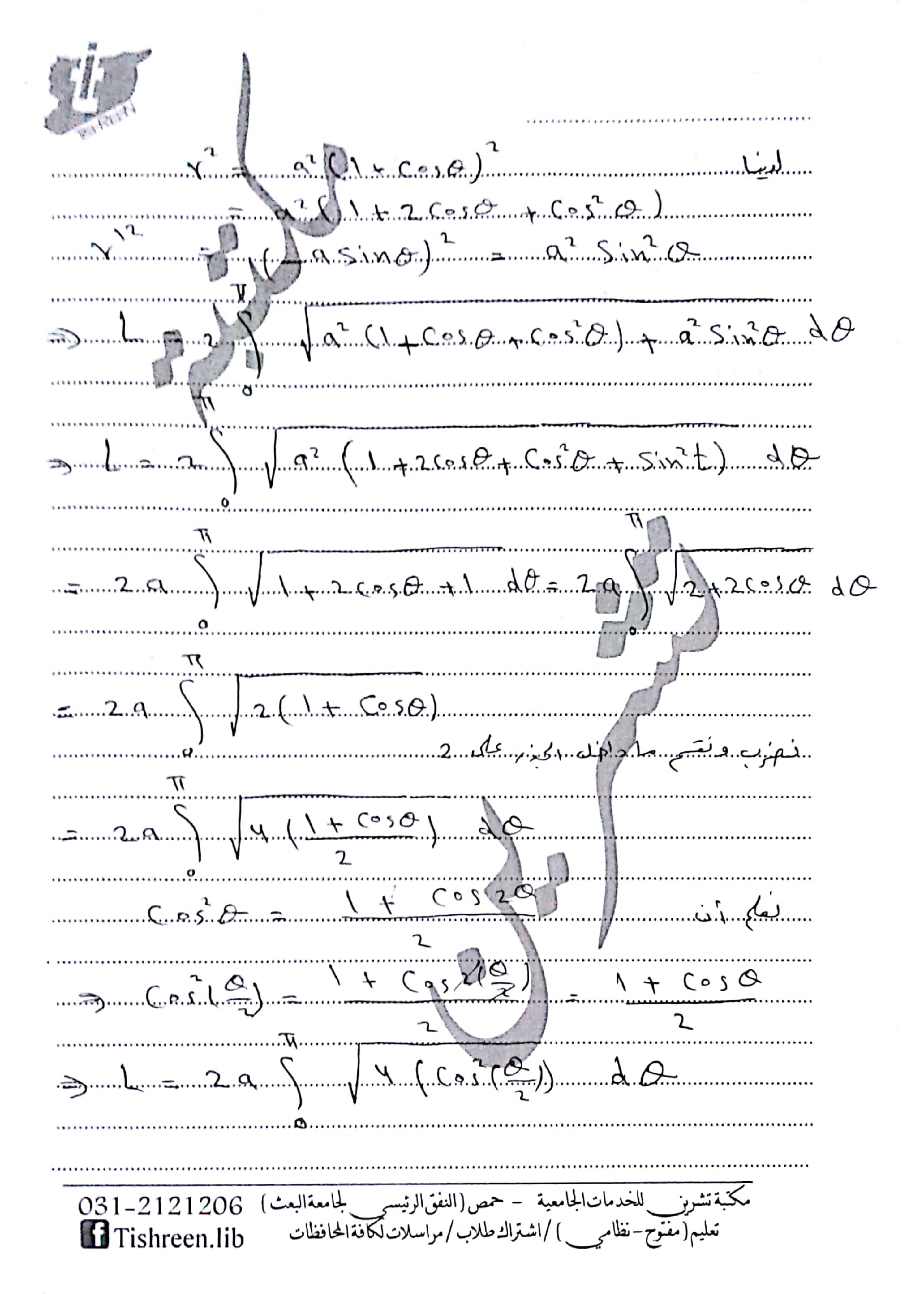
بالنسبة للمحور القطبي

ox

ولحساب طوله يكفي أن نحسب طول الجزء العلوي ونضرب الناتج

بـ 2

$$\Rightarrow L = 2\int_{0}^{\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\; dt$$



لدينا $r^2 = a^2(1+\cos\theta)^2$

$= a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)$

$r'^2 = (-a\sin\theta)^2 = a^2\sin^2\theta$

$$\Rightarrow L = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta+\cos^2\theta)+a^2\sin^2\theta}\;d\theta$$

$$\Rightarrow L = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2 t)}\;d\theta$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\theta+1}\;d\theta = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\;d\theta$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

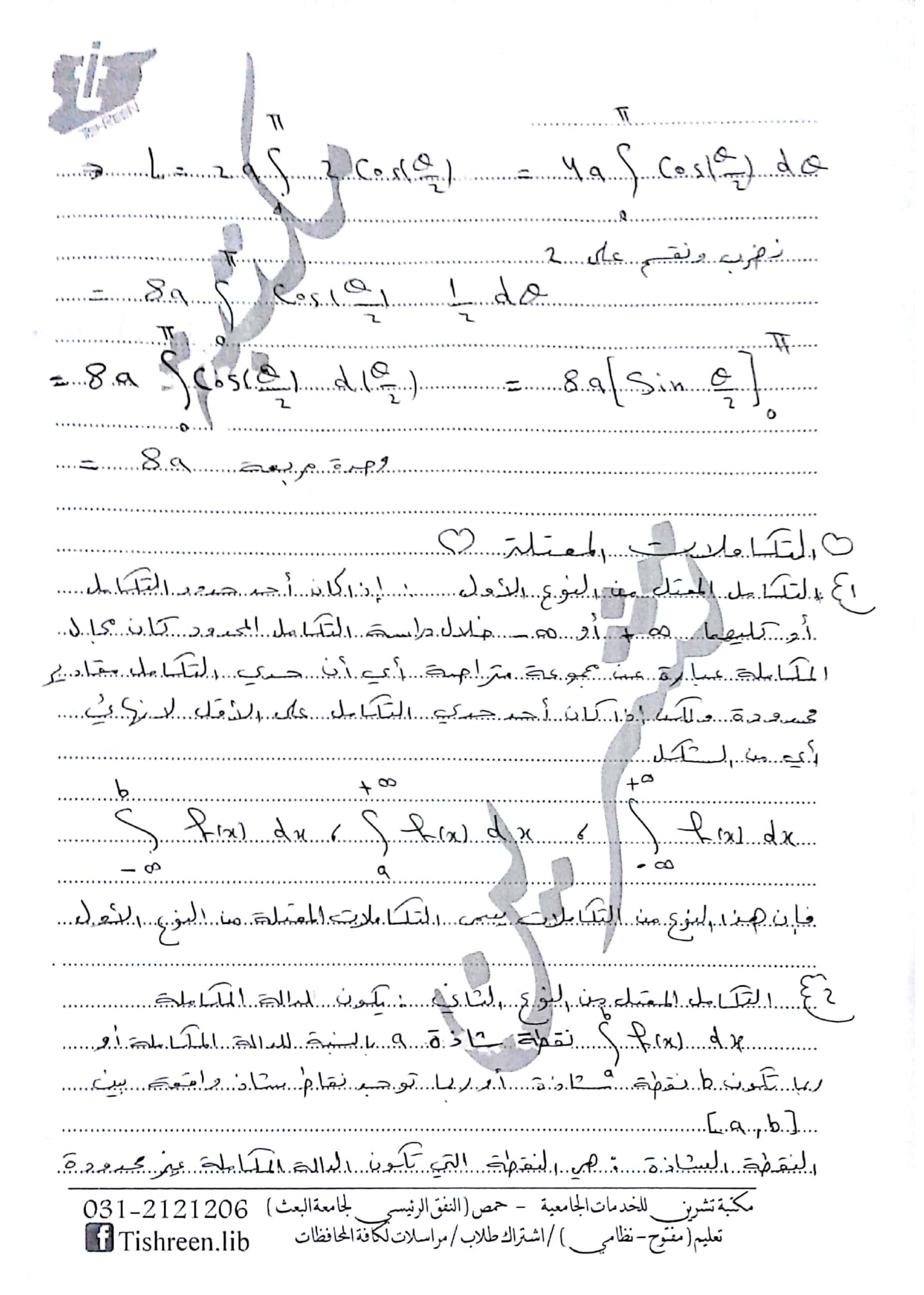
نضرب ونقسم ما داخل الجذر على 2

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)}\;d\theta$$

نعلم أن $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\Rightarrow L = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}\;d\theta$$



$$\Rightarrow L = 2a\int_0^{\pi} 2\cos(\tfrac{\theta}{2}) = 4a\int_0^{\pi}\cos(\tfrac{\theta}{2})\,d\theta$$

نضرب ونقسم على 2

$$= 8a\int_0^{\pi}\cos(\tfrac{\theta}{2})\,\tfrac{1}{2}\,d\theta$$

$$= 8a\int_0^{\pi}\cos(\tfrac{\theta}{2})\,d(\tfrac{\theta}{2}) = 8a\left[\sin\tfrac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$= 8a$ وحدة مربعة

♡ التكاملات المعتلة ♡

1) التكامل المعتل من النوع الأول: إذا كان أحد حدي التكامل أو كليهما $+\infty$ أو $-\infty$ خلال دراسة التكامل المحدود كان مجال التكامل عبارة عن مجموعة متراصة أي أن حدي التكامل مقادير محدودة ولكن إذا كان أحد حدي التكامل على الأقل لانهائي أي من الشكل

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \;,\; \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \;,\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

فإن هذا النوع من التكاملات يسمى التكاملات المعتلة من النوع الأول

2) التكامل المعتل من النوع الثاني: يكون للدالة المكاملة نقطة شاذة a بالنسبة للدالة المكاملة $\int_a f(x)\,dx$ أو ربما تكون b نقطة شاذة أو ربما توجد نقاط شاذة واقعة بين $[a,b]$

النقطة الشاذة: هي النقطة التي تكون الدالة المكاملة غير محدودة

غ جوارها.

تعريف: نفرض الدالة f(x) معرفة على المجال [a , +∞[وقابلة للمكاملة على أي مجال جزئي محدود ومغلق من المجال المغلق من الشكل [a , b] حيث b > a فإذا كانت النهاية التالية

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

موجودة ومحدودة ووحيدة فإننا نقول بأن التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ متقارب وقيمته تساوي قيمة هذه النهاية أي أن

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx = a$$

((وهو تكامل من النوع الأول))

<< انتهت المحاضرة التاسعة >>

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >>

<< إعداد فاطمة الشميني >>